

Capítulo 14

Vibrações de placas laminadas

Em todos os capítulos precedentes consideramos o laminado sob condições estáticas, isto é, buscamos sua deflexão e o estado de tensões sob carregamentos ditos estáticos. Frequentemente torna-se importante considerar os efeitos da inércia e do amortecimento da estrutura. Esses efeitos se tornam importantes, por exemplo, nas situações em que o carregamento varia acima de certa velocidade ao longo do tempo. Aqui se incluem os casos de impacto, de carregamentos harmônicos, de excitação pela base de fixação de máquinas, edificações e outros. Frequentemente as características dinâmicas de um componente ou estrutura são determinadas pela sua resposta à situação de vibrações livres não-amortecidas.

Neste capítulo apresentamos algumas soluções analíticas clássicas de problemas de determinação de frequências e modos naturais de vibrações.¹ Assim como nos Capítulos 12 e 13, as soluções são apresentadas aqui com duplo objetivo. Primeiro, demonstrar o uso de alguns métodos clássicos de solução de problemas diferenciais; segundo, mostrar que as soluções podem efetivamente fornecer valores indicativos, úteis em projeto preliminar de componentes reais, de geometria não simples. Adicionalmente esses valores são úteis na verificação de resultados obtidos por métodos numéricos de uso geral, durante a qualificação de programas computacionais. Esse tipo de uso é comum em atividades de pesquisa e desenvolvimento. Formulações de elementos finitos, que permitem o tratamento mais preciso de problemas reais, complexos, são vistas em capítulos subsequentes.

14.1 Placa delgada simétrica ortotrópica

As equações do movimento, em termos dos deslocamentos, para um laminado simétrico delgado são as eqs.(11.88) para membrana e (11.89) para flexão, vistas na página 314. O problema de vibrações livres é caracterizado por $q(x, y, t) = 0$, para $\forall (x, y) \in \Omega$, $t > 0$. Considera-se nesta seção que o laminado seja ortotrópico, $D_{16} = D_{26} = 0$, de forma que a equação de movimento para a flexão, eq.(11.89), torne-se:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho_o \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (14.1)$$

onde ρ_o é a densidade por unidade de área da placa, definida em (11.44). A solução $w(x, y, t)$ do problema deve satisfazer a equação diferencial (14.1), para $\forall (x, y) \in \Omega$ e $t > 0$, e também as condições de contorno presentes em $(x, y) \in \Gamma$ e as condições iniciais prescritas em $t = 0$. No caso da placa retangular de dimensões $a \times b$ simplesmente apoiada, como na Figura 14.1, as condições prescritas são:

¹Aqui apresentamos apenas soluções baseadas na teoria clássica de laminação. Isto é suficiente para os objetivos do texto. Entretanto, soluções mais precisas existem, com as de Srinivas e Rao, [188], [189]; estes apresentam soluções analíticas em séries obtidas pela teoria da elasticidade para os problemas de flexão estática, para vibrações livres e flambagem de placas ortotrópicas laminadas simplesmente apoiadas.

$$\begin{cases} w(x, y, t) = 0, \\ M_x(x, y, t) = 0 \quad \text{p/ } x = 0 \text{ e } x = a, \quad \forall t > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} w(x, y, t) = 0, \\ M_y(x, y, t) = 0 \quad \text{p/ } y = 0 \text{ e } y = b, \quad \forall t > 0. \end{cases} \\ \begin{cases} w(x, y, t) = 0, \\ M_x(x, y, t) = 0 \quad \text{para } x = 0 \text{ e } x = a, \quad \forall t > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} w(x, y, 0) = 0 \quad \text{p/ } \forall (x, y) \in \Omega. \end{cases} \quad (14.2)$$

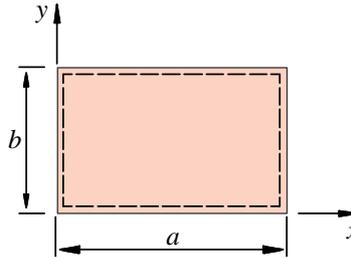


Figura 14.1: Configuração da placa retangular simplesmente apoiada.

Para um movimento harmônico, as coordenadas de espaço e tempo podem ser separadas na forma

$$w(x, y, t) = w(x, y)T(t), \quad (14.3)$$

onde $T(t)$ é uma função apenas do tempo. Note que, para conter a proliferação de símbolos, nos permitimos aqui usar a notação w com significados diferentes em cada lado da equação, uma vez que há pouca chance de isso provocar confusão. Da teoria clássica de vibrações [133], a equação (14.3) pode ser posta na forma:

$$w(x, y, t) = w(x, y)e^{i\omega t}, \quad (14.4)$$

onde ω é uma frequência natural a ser determinada e $i = \sqrt{-1}$. Substituindo (14.4) na equação de movimento (14.1), observamos que o termo no tempo, $e^{i\omega t}$, pode ser simplificado da equação, resultando uma equação diferencial no espaço apenas:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho_o \omega^2 w = 0. \quad (14.5)$$

Este é um **problema diferencial de autovalor**, em que a solução $w(x, y)$, o *autovetor*, depende de um parâmetro também a ser determinado, o **autovalor** ω . As condições de contorno deste problema são as quatro primeiras em (14.2). Observe que a equação (14.5) é semelhante à equação (12.1) na página 327 para flexão estática de laminados simétricos ortotrópicos. Formalmente, a diferença reside em que, naquele caso, a carga $q(x, y)$ era conhecida, enquanto no caso atual temos o termo $\rho_o \omega^2 w$ incógnito. As condições de contorno em ambos os problemas são as mesmas e a solução no espaço tem a mesma forma, aquela da eq.(12.3):

$$w(x, y) = W_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}, \quad (14.6)$$

com m e n inteiros. Observe que para um valor qualquer de frequência ω , a única solução de (14.5) é a trivial $w(x, y) = 0$, para $\forall (x, y) \in \Omega$. Apenas um determinado conjunto de valores de ω permite soluções não-nulas para w . Esses valores são obtidos substituindo (14.6) em (14.5). Os termos em x e y são separados e simplificados, donde resulta a *equação característica* do problema

$$\frac{\pi^4}{\rho_o} \left[D_{11} \left(\frac{m}{a} \right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{mn}{ab} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{n}{b} \right)^4 \right] = \omega^2. \quad (14.7)$$

Desta forma, para cada par de inteiros m, n que determina um harmônico em (14.6), existe um valor

Tabela 14.1: Fatores K para as frequências naturais de placas ortotrópicas retangulares.

modo	isotrópico, $a/b = 1$		isotrópico, $a/b = 2$		ortotrópico, $a/b = 1$	
	$\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 0, 40$		$\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 0, 40$		$\alpha = 10, \beta = 2, \gamma = 0, 881$	
	m/n	K_{iso}	m/n	K_{iso}	m/n	K
1	1/1	2,00000	1/1	1,25000	1/1	3,87298
2	1/2	5,00000	2/1	2,00000	1/2	6,48074
3	2/1	5,00000	3/1	3,25000	1/3	11,2694
4	2/2	8,00000	1/2	4,25000	2/1	13,3041
5	1/3	10,0000	2/2	5,00000	2/2	15,4919
6	3/1	10,0000	3/2	6,25000	2/3	19,6214
modo	ortotrópico, $a/b = 1$		ortotrópico, $a/b = 1$		ortotrópico, $a/b = 1$	
	$\alpha = 20, \beta = 1, \gamma = 0, 376$		$\alpha = 20, \beta = 2, \gamma = 0, 878$		$\alpha = 40, \beta = 1, \gamma = 0, 376$	
	m/n	K	m/n	K	m/n	K
1	1/1	4,79583	1/1	5,00000	1/1	6,55744
2	1/2	6,63325	1/2	7,21110	1/2	8,00000
3	1/3	10,9087	1/3	11,7047	1/3	11,7898
4	2/1	18,1384	2/1	18,3576	2/1	25,4755
5	2/2	19,1833	2/2	20,0000	2/2	26,2298
6	2/3	21,7486	2/3	23,3452	2/3	28,1613
modo	ortotrópico, $a/b = 1$		ortotrópico, $a/b = 1$		ortotrópico, $a/b = 1$	
	$\alpha = 40, \beta = 2, \gamma = 0, 876$		$\alpha = 10, \beta = 1, \gamma = 0, 377$		$\alpha = 20, \beta = 2, \gamma = 0, 878$	
	m/n	K	m/n	K	m/n	K
1	1/1	6,70820	1/1	3,60550	1/1	5,00000
2	1/2	8,48528	1/2	5,83095	1/2	7,21110
3	1/3	12,5300	1/3	10,4403	1/3	11,7047
4	2/1	25,6320	2/1	13,0000	2/1	18,3576
5	2/2	26,8328	2/2	14,4222	2/2	20,0000
6	2/3	29,4109	2/3	17,6918	2/3	23,3452
modo	ortotrópico, $a/b = 2$		ortotrópico, $a/b = 2$		ortotrópico, $a/b = 2$	
	$\alpha = 20, \beta = 1, \gamma = 0, 376$		$\alpha = 20, \beta = 2, \gamma = 0, 878$		$\alpha = 40, \beta = 1, \gamma = 0, 376$	
	m/n	K	m/n	K	m/n	K
1	1/1	1,65831	1/1	1,80278	1/1	2,00000
2	1/2	4,38748	1/2	4,60977	1/2	4,52769
3	2/1	4,79583	2/1	5,00000	2/1	6,55744
4	2/2	6,63325	2/2	7,21110	2/2	8,00000
5	1/3	9,31397	1/3	9,55249	1/3	9,38083
6	3/1	10,3320	3/1	10,5475	2/3	11,7898
modo	ortotrópico, $a/b = 2$		ortotrópico, $a/b = 2$		ortotrópico, $a/b = 4$	
	$\alpha = 40, \beta = 2, \gamma = 0, 876$		$\alpha = 10, \beta = 1, \gamma = 0, 377$		$\alpha = 40, \beta = 1, \gamma = 0, 376$	
	m/n	K	m/n	K	m/n	K
1	1/1	2,12132	1/1	1,45774	1/1	1,13192
2	1/2	4,74342	2/1	3,60555	2/1	2,00000
3	2/1	6,70820	1/2	4,31567	3/1	3,84464
4	2/2	8,48528	2/2	5,83095	1/2	4,08121
5	1/3	9,61769	3/1	7,49166	2/2	4,52769
6	2/3	12,5300	3/2	9,19918	3/2	5,75815

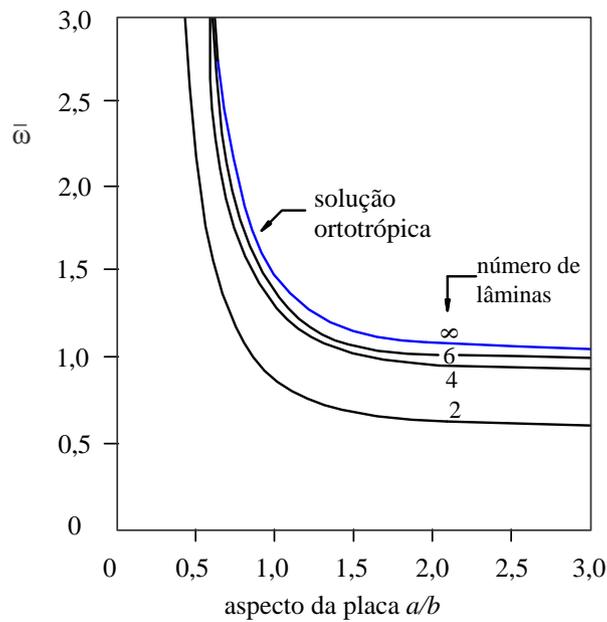


Figura 14.3: Primeira freqüência natural para uma placa retangular delgada anti-simétrica cruzada. $\bar{\omega} = \omega_{11} b^2 \sqrt{\rho_o D_{22}} / \pi^2$. $E_1 = 40E_2$, $G_{12} = 2E_2$, $\nu_{12} = 0,25$. (Jones [106].)

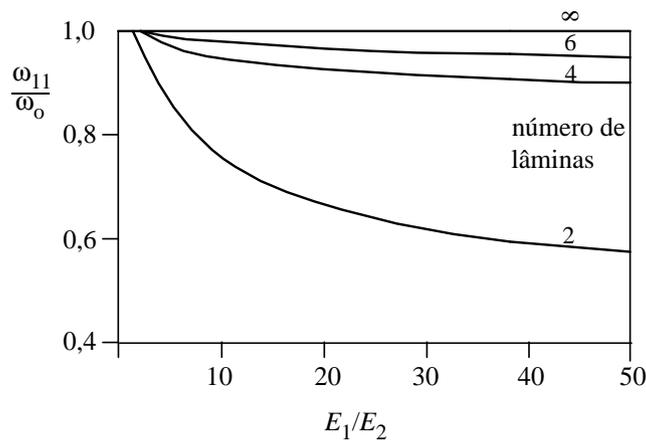


Figura 14.4: Primeira freqüência natural para uma placa quadrada delgada anti-simétrica cruzada. $G_{12} = 2E_2$, $\nu_{12} = 0,25$. (Jones [106].)

14.3 Placa delgada anti-simétrica angular

Considera-se aqui a placa anti-simétrica regular com lâminas com suas direções principais dispostas angularmente em relação aos eixos globais da placa. A solução deste problema é semelhante à do caso estático visto na Seção 12.4. A solução foi apresentada por Whitney e Leissa [219] e desenvolvido por Jones [106]. Este tipo de laminado tem $A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$ e \mathbf{B} é populada apenas por B_{16} e B_{26} , o que resulta num acoplamento de tipo diferente daquele do laminado anti-simétrico cruzado.

A solução do problema é obtida das equações de movimento (11.87), onde aplicamos $q = 0$ e eliminamos os termos de inércia coplanares:

cometidos quando se despreza o efeito do acoplamento, usando $B_{16} = B_{26} = 0$, podem chegar a 80%, isto é, a resposta pode ser quase o dobro da solução correta.

14.4 Placa delgada simétrica angular – Método energético

Consideramos aqui dois casos de vibrações livres de placas delgadas simétricas com lâminas orientadas obliquamente em relação aos eixos x - y : placa engastada e placa simplesmente apoiada nas bordas. Segundo o princípio energético que governa o fenômeno, a solução do problema, $u^o(x, y, t)$, $v^o(x, y, t)$ e $w(x, y, t)$, é aquele conjunto único de funções que minimiza a energia potencial em (11.140), página 323. No presente caso, a ausência de cargas transversais e coplanares faz com que U_G e W sejam nulos (onde U_G é a energia de deformação das forças coplanares sobre os deslocamentos transversais w , e W a energia potencial das cargas externas).

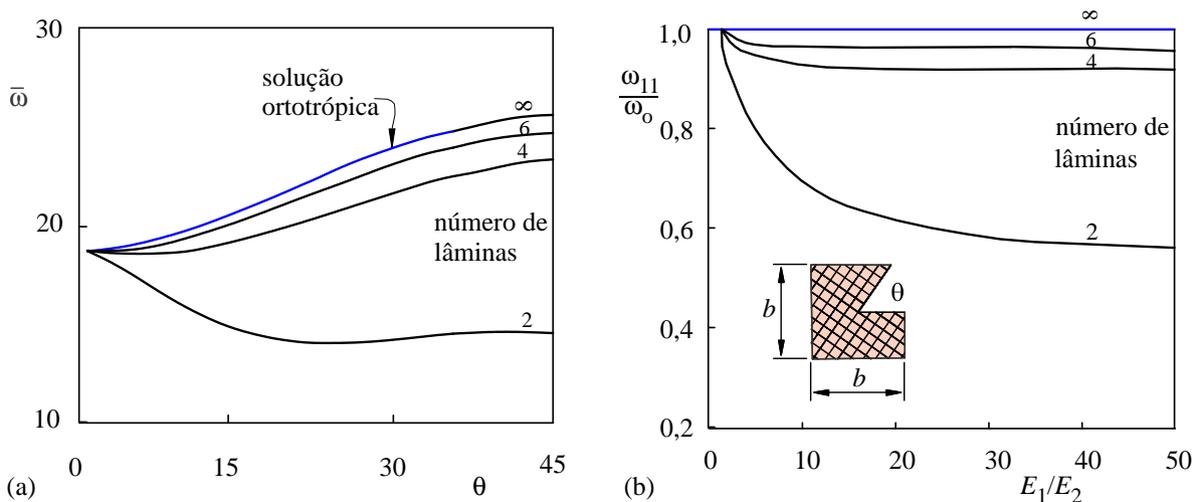


Figura 14.5: Primeira freqüência natural para uma placa quadrada delgada anti-simétrica angular simplesmente apoiada. $\bar{\omega} = \omega_{11}b^2\sqrt{\rho_o/E_2H^3}$. [107].

Como o laminado é simétrico, a energia de deformação de flexão é desacoplada da energia de membrana, dada pela segunda integral em (11.135). A energia cinética T é dada pela parte de flexão em (11.138), página 322. Como não se está considerando o cisalhamento transversal, despreza-se na energia cinética as inércias rotacionais ρ_1 e ρ_2 e a energia potencial total é dada por:

$$\begin{aligned} \Pi &= U_f + T \\ &= \frac{1}{2} \int_{y=0}^b \int_{x=0}^a [D_{11}w_{,xx}^2 + 2D_{12}w_{,xx}w_{,yy} + D_{22}w_{,yy}^2 + \\ &\quad 4(D_{16}w_{,xx} + D_{26}w_{,yy})w_{,xy} + 4D_{66}w_{,xy}^2 + \rho_o w_{,t}^2] dx dy. \end{aligned} \quad (14.25)$$

Para a solução deste problema usa-se o método de Ritz onde, inicialmente, se buscará uma solução por separação de variáveis na forma

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{m_1} \sum_{n=1}^{n_1} W_{mn} X_m(x) Y_n(y) e^{i\omega t}. \quad (14.26)$$

As funções $X(x)$ e $Y(y)$ devem ser escolhidas de forma a satisfazer as condições de contorno de deslocamento em Γ_u . (Como definido no Capítulo 11, Γ_u é a parcela do contorno em que são aplicadas condições de contorno essenciais, que neste caso são os deslocamentos prescritos.) Uma vez estabelecida a solução na forma (14.26), busca-se o valor estacionário de Π . Para isso, substituímos (14.26) em (14.25) e diferenciamos Π em relação aos coeficientes W_{mn} , usando (12.42), página 334, donde resulta

de um laminado ortotrópico, visto em (12.46).

A tarefa, neste ponto do desenvolvimento, consiste em escolher um conjunto de funções $X_m(x)$ e $Y_n(y)$ que satisfaça as condições de contorno de deslocamentos em Γ_u . Para um **contorno simplesmente apoiado** podem-se usar as funções

$$X_m(x) = \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}, \quad Y_n(y) = \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}. \quad (14.31)$$

Observe que a presença dos termos D_{16} e D_{26} torna de tal forma complexa a equação de movimento e as condições de contorno do problema, que praticamente impede que se obtenha uma solução exata. Estes termos também impedem que (14.31) satisfaça a condição de contorno de força $M_n = 0$, o que causa, em geral, uma convergência mais lenta do método de Ritz.

Para o caso de **bordas engastadas**, diversas famílias de funções poderiam ser usadas, como por exemplo as funções (12.47). Entretanto, comentaremos aqui um processo, aplicável em diversos tipos de problemas, que pode ser usado na determinação de uma família de funções para a solução do problema em consideração.

A ideia proposta por Young [224] e por Hearmon [88], consiste em usar como funções $X_m(x)$ e $Y_n(y)$ a solução analítica dos modos de vibração de uma viga. Desta forma as funções usadas automaticamente satisfazem todas as condições de contorno da placa. Por exemplo, consideremos uma placa com dois lados contíguos simplesmente apoiados e dois engastados como na Figura 14.6. Uma tira AB cortada ao longo do eixo x da placa possui certa semelhança com uma viga engastada num extremo e simplesmente apoiada na outra extremidade. As funções dos modos de vibração da viga podem ser obtidas analiticamente e usadas no problema de placas em lugar de $X_m(x)$ e também como $Y_n(y)$ em (14.26). Placas com outros tipos de condições de contorno também podem ter a solução obtida usando este procedimento ([224] e [213]).

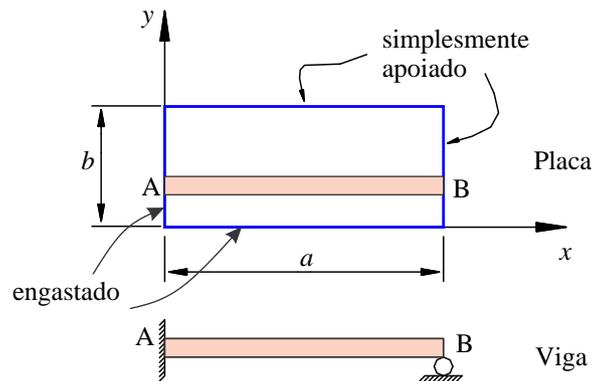


Figura 14.6: Exemplo da placa com dois lados engastados e dois simplesmente apoiados e correspondência com uma viga.

A seguir, voltamos nossa atenção para a solução do problema de vibrações de uma **placa engastada em todos os lados**. As funções dos modos de vibração de uma viga isotrópica biengastada podem ser obtidas a partir dos procedimentos encontrados em livros clássicos de vibrações, como [61]. O leitor familiarizado com esses processos pode passar diretamente às funções dadas nas eqs.(14.43).

A equação de movimento livre de uma **viga de Euler-Bernoulli** (delgada) é:

$$\frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \frac{\rho}{EI} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (14.32)$$

Separamos as variáveis na forma

$$w(x, t) = \phi(x)T(t). \quad (14.33)$$

Substituindo em (14.32), obtêm-se duas equações diferenciais, uma em x , outra no tempo:

Existem infinitas raízes para a função (14.39). Cada raiz corresponde a uma frequência natural da viga dada por (14.35). A cada frequência corresponde uma função $\phi(x)$ de (14.40) que descreve um modo de vibrações da viga. Usando um manipulador simbólico de equações como o Mathematica ou o Matlab, algumas das primeiras raízes de (14.39) e os correspondentes valores de γ em (14.41) podem ser obtidos, como aqueles mostrados na Tabela 14.2. Uma curiosidade sobre as raízes de (14.39) é que elas seguem um padrão mais simples, como pode ser observado inspecionando os λ_j da tabela. Whitney [213] mostra que, conforme λ_j cresce, $\cosh \lambda_j \rightarrow e^{\lambda_j}/2$, de tal forma que (14.39) tende a $\cos \lambda_j = 2e^{-\lambda_j}$. Logo, conforme λ_j tende ao infinito, $\cos \lambda_j$ tende a 0 e

$$\lambda_j \approx \bar{\lambda}_j = \frac{\pi}{2} (2j + 1). \tag{14.42}$$

Os valores previstos por (14.42), grafados como $\bar{\lambda}_j$ na Tabela 14.2, se aproximam muito bem às raízes de (14.39) para $j > 2$.

Voltamos agora ao problema de **vibrações da placa laminada engastada** em toda a borda. As funções escolhidas para (14.26) são tomadas da solução de vigas (14.40) nas direções x e y na forma

$$\begin{aligned} X_m(x) &= \text{sen} \frac{\lambda_m x}{a} + \gamma_m \cos \frac{\lambda_m x}{a} - \text{senh} \frac{\lambda_m x}{a} - \gamma_m \cosh \frac{\lambda_m x}{a}, \\ Y_m(y) &= \text{sen} \frac{\lambda_n y}{b} + \gamma_n \cos \frac{\lambda_n y}{b} - \text{senh} \frac{\lambda_n y}{b} - \gamma_n \cosh \frac{\lambda_n y}{b}, \end{aligned} \tag{14.43}$$

onde λ_m e λ_n são as raízes de (14.39) e γ_m e γ_n vêm de (14.41). Com estas funções, os termos das matrizes de rigidez e de inércia em (14.30) podem ser integrados e o problema de autovalores (14.29) resulta em aproximações para as frequências e modos de vibração da placa.

Tabela 14.3: Fator K para as frequências naturais de uma placa simétrica angular engastada.

$a = b$ (Whitney [213])				
θ	modo 1	modo 2	modo 3	modo 4
0°	23,97	31,15	46,41	62,77
15°	23,10	31,52	47,65	59,46
30°	21,35	33,18	50,72	51,87
45°	20,51	35,01	47,07	52,21
$a = 2b$				
0°	9,34	17,71	20,83	26,49
15°	9,68	17,19	22,02	26,44
26,6°	10,57	16,93	25,11	25,46
45°	13,88	17,73	23,85	31,73
60°	17,87	19,86	23,75	29,75
75°	21,27	22,32	24,69	28,94
90°	22,57	23,38	25,30	28,87

Whitney [213] apresenta resultados numéricos para um laminado de uma lâmina com orientação θ em relação ao eixo x . As propriedades são $E_1/E_2 = 10$, $G_{12}/E_2 = 0,25$ e $\nu_{12} = 0,3$. Foram usados sete termos em cada série em (14.26), isto é, $m_1 = n_1 = 7$. A Tabela 14.3 mostra constantes K que definem as quatro primeiras frequências naturais da placa. As frequências são dadas em termos de K da seguinte forma:

$$\omega^2 = \frac{K^2 D_{\theta\theta}}{b^4 \rho_o}, \quad \text{com} \quad D_{\theta\theta} = \frac{E_1 H^3}{(1 - \nu_{12}^2 E_2/E_1)} \tag{14.44}$$

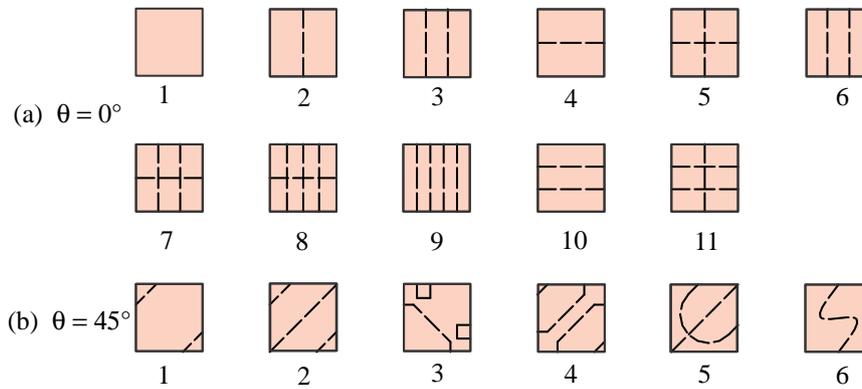


Figura 14.7: Linhas nodais para laminados quadrados engastados de uma única lâmina, orientados a 0° e 45° .

Resultados também podem ser obtidos desprezando os termos em D_{16} e D_{26} . No caso de placa quadrada, para $\theta = 45^\circ$, os erros na primeira frequência são da ordem de 15% acima do valor correto, crescendo até 24% na quarta frequência, sempre por cima. Isso dá uma ideia do grau de importância de manter esses termos na análise.

A Figura 14.7 esboça as linhas nodais dos primeiros modos em duas placas quadradas, uma orientada a 0° e outra a 45° , para um particular conjunto de valores de propriedades. A comparação dos modos correspondentes nas duas placas torna claro o seguinte: uma aproximação ortotrópica a um problema de lâminas angulares não apenas apresentaria erros nas frequências, como indicado na Tabela 14.3, como também não teria nenhuma possibilidade de representar corretamente os modos de vibração.

14.5 Exercícios

- 14.1 Use o método de Ritz junto às funções (14.31) para obter as frequências naturais de uma placa simétrica angular simplesmente apoiada. Faça plotagem de frequências *versus* θ e E_1/E_2 para diversas quantidades de lâminas, na forma da Figura 14.5.
- 14.2 Repita o problema anterior usando as funções (14.43) para uma placa engastada.
- 14.3 Obtenha uma outra base de funções, por exemplo trigonométricas, para o problema 2 e refaça a solução. Compare as taxas de convergência.